Grundlagen der Mathematik

Übungsaufgaben zu Kapitel 1 „Einführung“

1.1.1 Für reelle Zahlen a und b gilt $(a+b)*(a-b) = a^2-b^2$.
Was ist die Voraussetzung? Wie lautet die Behauptung?
Beweisen Sie die Behauptung.

1.2.1 Geben Sie den Wert der Binärzahl 101011 als Dezimalzahl an.

1.2.2 Geben Sie den Wert der Dezimalzahl 57 als Binärzahl an.

1.2.3 Multiplizieren Sie die Binärzahlen 1101 und 101 mithilfe des auf Folie „Multiplikation natürlicher Zahlen, Algorithmus zur Berechnung von c = a*b“ (GM 1-9) angegebenen Vefahrens. Kontrollieren Sie das Ergebnis, indem Sie die Zahlen dezimal darstellen und multiplizieren.

1.2.4 Nehmen Sie an, Sie wollten die Korrektheit des Multiplikationsverfahrens auf Folie GM 1-9 durch Testen nachweisen, indem Sie alle möglichen Kombinationen von zwei 32-stelligen Binärzahlen prüfen. Nehmen Sie optimistisch an, dass Sie für das Eingeben der Zahlen, die Durchführung der Rechnung und der Überprüfung des Ergebnisses pro Datenfall nur 1 Sekunde benötigen.

Wie lange brauchen Sie ungefähr für die Durchführung des Testes?

Hinweis: Es gibt 2^{32} verschiedene 32-stellige Binärzahlen.

Übungsaufgaben zu Kapitel 2 „Mengen“

2.2.1 Schreiben Sie eine Wahrheitstafel für die Aussage $(P \wedge Q) \Rightarrow (Q \vee (\neg R))$.

2.2.2 Beweisen Sie Satz 2.2.1 b)-f) durch Aufstellen der Wahrheitstafeln.

2.2.3 Beweisen Sie Satz 2.2.2 durch Aufstellen der Wahrheitstafeln, soweit in der Vorlesung noch nicht gemacht.

2.2.4 Geben Sie die Wahrheitswerte der folgenden Aussagen an und begründen Sie Ihre Auffassung:

a) $\forall x \in \mathbb{N}: x^2=16$
b) $\forall x \in \mathbb{N}: x^2-1=(x+1)(x-1)$
c) $\exists x \in \mathbb{N}: x^2=16$
d) $\exists x \in \mathbb{N}: x^2=2{,}25$
e) $\exists x \in \mathbb{Q}: x^2=2{,}25$
f) $\exists x \in \mathbb{N}: x^2+1=0$
g) $\forall x \in \mathbb{N}: x>11$
h) $\neg \forall x \in \mathbb{N}: x>11$
i) $\exists x \in \mathbb{N}: x \leq 11$
j) $\neg \exists x \in \mathbb{N}: x \leq 11$

2.2.5 Es sei $M = \{ 0, 3, 7, 11, 15, 44 \}$. Geben Sie die Menge $A = \{ x \mid x \in M \wedge x<11\}$ durch Aufzählung ihrer Elemente an.

2.2.6 Es sei $M = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x>8 \wedge x<12\}$. Geben Sie die Menge M durch Aufzählung ihrer Elemente an.

2.2.7 Es sei $M = \{0, 1, 2, 3\}$. Beschreiben Sie die Menge M durch eine charakteristische Eigenschaft.

2.2.8 Es sei $M = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x<8 \wedge x>12\}$. Geben Sie die Menge M in möglichst einfacher Form an.

2.2.9 Es sei $M = \{ x \in \mathbb{N} \mid x<12 \wedge \exists y \in \mathbb{N}: x=2y \}$. Geben Sie die Menge M durch Aufzählung ihrer Elemente an.

2.3.1 Es seien $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x<5\}$ und $B = \{ x \in \mathbb{N} \mid 2x<11\}$. Zeigen Sie, dass $A \subseteq B$ gilt.

2.3.2 Es seien $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \geq 9\}$ und $B = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \geq 3 \}$. Zeigen Sie, dass $A=B$.

2.3.3 Es seien $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \geq 9 \}$ und $B = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \geq 3 \}$. Zeigen Sie, dass $A \subset B$ gilt.

2.3.4 Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

a) $1 \in \{\{1\},4\}$
$\{1\} \in \{\{1\},4\}$
$\{1\} \subseteq \{\{1\},4\}$
$\{\{1\},4\} \subseteq \{\{1\},4\}$
$\{\{1\},4\} \subset \{\{1\},4\}$

b) $\emptyset \in \{\{1\},4\}$
$\{\emptyset\} \in \{\{1\},4\}$
$\emptyset \subseteq \{\{1\},4\}$
$\{\emptyset\} \subseteq \{\{1\},4\}$

c) $\emptyset \in \{\{1\},4,\emptyset\}$
$\{\emptyset\} \in \{\{1\},4,\emptyset\}$
$\emptyset \subseteq \{\{1\},4,\emptyset\}$
$\{\emptyset\} \subseteq \{\{1\},4,\emptyset\}$

2.3.5 Bestimmen Sie $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$

2.4.1 Bestimmen Sie $\{ x \in \mathbb{N} \mid x<11\} \cup \{ x \in \mathbb{N} \mid x>5\}$

2.4.2 Bestimmen Sie $\{ x \in \mathbb{N} \mid x<11\} \cap \{ x \in \mathbb{N} \mid x>5\}$

2.4.3 Beweisen Sie Satz 2.4.2. a), c) und d).

2.4.4 Beweisen Sie Satz 2.4.3. Welche Gesetze der Aussagenlogik haben Sie hierbei verwendet?

2.4.5 Seien A und B Mengen. Zeigen Sie, dass $A \setminus B \subseteq A$

2.4.6 Beweisen Sie Satz 2.4.4 b).

Übungsaufgaben zu Kapitel 3 „Relationen“

3.1.1 Geben Sie die Menge $\{ 0, 1 \}^2$ durch Aufzählung ihrer Elemente an.

3.1.2 Geben Sie die Menge $\{ a, b \} \times \{ x \in \mathbb{N} \mid (x-2)^2=4 \} \times \{ 0, 1 \}$ durch Aufzählung ihrer Elemente an.

3.2.1 Es seien $A = \{ a, b, c, d, e \}$ und $X = \{ x, y, z \}$ Mengen. Stellen Sie die Relation $R = \{ (a,x), (a,y), (a,z), (c,x), (d,z) \}$ zwischen A und X durch Matrix, Tabelle und Graph dar.

3.2.2 Alois und Berta haben drei Kinder Christian, Doris und Emil. Christian hat Friederike geheiratet, ihre Kinder heißen Gisela und Hanna. Doris hat eine Tochter Irene.
a) Stellen Sie die Relation "Ist Kind von" auf der Menge der genannten Namen in der Mengenschreibweise { (..., ...), ...}, durch eine Matrix und durch einen Graphen dar.
b) Ist die Relation "Ist Kind von" reflexiv? Beweisen Sie Ihre Aussage.
c) Ist die Relation "Ist Kind von" symmetrisch? Beweisen Sie Ihre Aussage.
d) Ist die Relation "Ist Kind von" antisymmetrisch? Beweisen Sie Ihre Aussage.
e) Ist die Relation "Ist Kind von" asymmetrisch? Beweisen Sie Ihre Aussage.
f) Ist die Relation "Ist Kind von" transitiv? Beweisen Sie Ihre Aussage.

3.2.3 Es sei $R = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in A \wedge (\exists z \in \mathbb{N}: x \cdot z = y) \}$ eine Relation auf A, wobei $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0<x<7 \}$. Hinweis: $\exists z \in \mathbb{N}: x \cdot z = y$ bedeutet x teilt y ohne Rest.
a) Stellen Sie R durch Aufzählung ihrer Elemente, Matrix und Graph dar.
b) Ist R reflexiv? Beweisen Sie Ihre Aussage.
c) Ist R symmetrisch? Beweisen Sie Ihre Aussage.
d) Ist R antisymmetrisch? Beweisen Sie Ihre Aussage.
e) Ist R asymmetrisch? Beweisen Sie Ihre Aussage.
f) Ist R transitiv? Beweisen Sie Ihre Aussage.

3.2.4 Es sei $R = \{ (x, y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge x>0 \wedge y \in \mathbb{N} \wedge y>0 \wedge (\exists z \in \mathbb{N}: x \cdot z = y) \}$ eine Relation auf $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Hinweis: $\exists z \in \mathbb{N}: x \cdot z = y$ bedeutet x teilt y ohne Rest.
a) Ist R reflexiv? Beweisen Sie Ihre Aussage.
b) Ist R symmetrisch? Beweisen Sie Ihre Aussage.
c) Ist R antisymmetrisch? Beweisen Sie Ihre Aussage.
d) Ist R asymmetrisch? Beweisen Sie Ihre Aussage.
e) Ist R transitiv? Beweisen Sie Ihre Aussage.

3.2.5 Es sei R = { (x,y) I $x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x+y=100$ } eine Relation auf $\mathbb{N}$.
a) Ist R reflexiv? Beweisen Sie Ihre Aussage.
b) Ist R symmetrisch? Beweisen Sie Ihre Aussage.
c) Ist R antisymmetrisch? Beweisen Sie Ihre Aussage.
d) Ist R asymmetrisch? Beweisen Sie Ihre Aussage.
e) Ist R transitiv? Beweisen Sie Ihre Aussage.

3.2.6 Geben Sie eine Relation (z.B. auf einer 3-elementigen Menge) an, die antisymmetrisch aber nicht asymmetrisch ist.

3.3.1 Seien A eine Menge und R = A × A. Zeigen Sie, daß R eine Äquivalenzrelation auf A ist. Wie sehen die zugehörigen Äquivalenzklassen aus?

3.3.2 Seien A eine Menge und id_A = { (x,x) I $x \in A$ }. Zeigen Sie, daß id_A eine Äquivalenzrelation auf A ist. Wie sehen die zugehörigen Äquivalenzklassen aus?

3.3.3 Es sei A = { $x \in \mathbb{N}$ | x<8 } und R = { (x,y) | $x \in A \wedge y \in A \wedge ((x-3)^2 = (y-3)^2)$ }.
a) Stellen Sie R als Graphen dar. Hinweis: Machen Sie sich eine Tabelle mit x und $(x-3)^2$.
b) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation auf A ist.
c) Geben Sie Äquivalenzklassen von A bezüglich R an.

3.3.4 Auf einer Menge M = {a, b, c} sei die Partition P = { {a}, {b,c} } gegeben.Geben Sie eine Äquivalenzrelation R an, sodass $M/_R$ = P.

3.3.5 Wieviele verschiedene Äquivalenzrelationen gibt es auf einer dreielementigen Menge?
Hinweis: bestimmen Sie zunächst die Anzahl der verschiedenen Partitionen.

3.4.1 Auf einer Menge A von quaderförmigen Schachteln, in der jede Größe nur einmal vorkommt, wird wie folgt eine Relation R definiert: Für die Schachtel a mit der Länge a_l, der Breite a_b und der Höhe a_h sowie für die Schachtel b mit der Länge b_l, der Breite b_b und der Höhe b_h sei aRb genau dann, wenn $a_l \leq b_l$, $a_b \leq b_b$ und $a_h \leq b_h$.
Zeigen Sie, dass R eine Halbordnung auf A ist. Kann es unvergleichbare Elemente geben? (a und b sind unvergleichbar, wenn weder aRb noch bRa gilt.)

3.4.2 Sei A eine nichtleere Menge. $\subseteq$ ist dann eine Relation auf der Potenzmenge $\mathcal{P}$(A).
a) Ist $\subseteq$ reflexiv? Beweisen Sie Ihre Aussage.
b) Ist $\subseteq$ symmetrisch? Beweisen Sie Ihre Aussage.
c) Ist $\subseteq$ antisymmetrisch? Beweisen Sie Ihre Aussage.
d) Ist $\subseteq$ asymmetrisch? Beweisen Sie Ihre Aussage.
e) Ist $\subseteq$ transitiv? Beweisen Sie Ihre Aussage.
f) Zeigen Sie, dass $\subseteq$ auf der Potenzmenge $\mathcal{P}$(A) eine Halbordnung darstellt.

3.4.3 Sei A eine nichtleere Menge. $\subset$ ist dann eine Relation auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$.

a) Ist $\subset$ reflexiv? Beweisen Sie Ihre Aussage.
b) Ist $\subset$ symmetrisch? Beweisen Sie Ihre Aussage.
c) Ist $\subset$ antisymmetrisch? Beweisen Sie Ihre Aussage.
d) Ist $\subset$ asymmetrisch? Beweisen Sie Ihre Aussage.
e) Ist $\subset$ transitiv? Beweisen Sie Ihre Aussage.
f) Zeigen Sie, dass $\subset$ auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ eine strikte Halbordnung darstellt.

3.4.4 Auf der Menge der natürlichen Zahlen definiert man die Teilbarkeitsrelation | durch $x|y \Leftrightarrow (\exists z \in \mathbb{N}: z \cdot x = y)$.
Zeigen Sie, dass die Relation | eine Halbordnung ist.
Stellen Sie die Relation | auf der Menge $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 10\}$ durch ein Hasse-Diagramm dar.

3.5.1 Die Relation R auf A ist gegeben durch A = { a, b, c, d, e, f } und R = { (a,c), (b,c), (c,d), (d,e), (d,f), (f,f) }. Bestimmen Sie die transitive Hülle.

Übungsaufgaben zu Kapitel 4 „Abbildungen“

4.1 Es sei $f = \{ (x,y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge y=x+1 \}$ eine Relation auf $\mathbb{N}$.

a) Ist f linkstotal?
b) Ist f rechtseindeutig?
c) Ist f eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$?
Falls ja
d) Ist f injektiv?
e) Ist f surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$?

4.2 Es sei $f = \{ (x,y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge y=x-1 \}$ eine Relation auf $\mathbb{N}$.

a) Ist f linkstotal?
b) Ist f rechtseindeutig?
c) Ist f eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$?
Falls ja
d) Ist f injektiv?
e) Ist f surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$?

4.3 Es sei $f = \{ (x,y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge (y=x-1 \vee y=x+1) \}$ eine Relation auf $\mathbb{N}$.

a) Ist f linkstotal?
b) Ist f rechtseindeutig?
c) Ist f eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$?
Falls ja
d) Ist f injektiv?
e) Ist f surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$?

4.4 Es sei $f = \{ (x,y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge (y=x-5 \vee y=5-x) \}$ eine Relation auf $\mathbb{N}$.

a) Ist f linkstotal?
b) Ist f rechtseindeutig?
c) Ist f eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$?
Falls ja
d) Ist f injektiv?
e) Ist f surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$?
Hinweis: Bei den Beweisen hilft eine Fallunterscheidung $x<5$, $x=5$ und $x>5$.

4.5 Wir definieren eine Abbildung $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ durch $f(x)=x^3$.

a) Ist f injektiv?
b) Ist f surjektiv?

4.6 Wir definieren eine Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x)=x^3$.

a) Ist f injektiv?
b) Ist f surjektiv?

4.7 Zu einer Abbildung f: A → B definiert man die Relation
g = { (y,x) | (x,y)∈f } zwischen B und A. Beweisen Sie folgende Aussagen:
a) Ist f eine surjektive Abbildung von A auf B, dann ist g linkstotal.
b) Ist f eine injektive Abbildung, dann ist g rechtseindeutig.
c) Ist f eine bijektive Abbildung von A auf B, dann ist g eine Abbildung von B in A.

4.8 Beweisen Sie **Satz 4.1**. Hinweis: Sie können die Aussagen von Übungsaufgabe **4.7** verwenden.

4.9 Es sei M = { {0,1}, {2,3,4}, {a,b}, {c,d}, {e,f,g} }. Wir definieren eine Relation R auf M wie folgt: A∈M und B∈M seien in der Relation R genau dann, wenn eine bijektive Abbildung von A in B existiert. Stellen Sie die Relation R graphisch dar. Ist R eine Äquivalenzrelation?

4.10 Es sei A eine Menge. Wir definieren eine Abbildung id_A von A in A durch $id_A(x) = x$. Zeigen Sie, dass id_A bijektiv ist.

4.11 Es sei f eine bijektive Abbildung von A in B. Zeigen Sie, dass die Umkehrabbildung von f bijektiv ist.

4.12 Es seien f eine Abbildung von A in B und g eine Abildung von B in C. Wir definieren eine Abbildung g∘f von A in C durch g∘f(x) = g(f(x)). g∘f ist also die Hintereinanderausführung von f und g.
Zeigen Sie:
a) Sind f und g injektiv, dann ist auch g∘f injektiv.
b) Sind f und g surjektiv, dann ist auch g∘f surjektiv.
c) Sind f und g bijektiv, dann ist auch g∘f bijektiv.

4.13 Es sei M eine Menge von Mengen. Wir definieren eine Relation R auf M wie folgt: A und B seien in der Relation R genau dann, wenn eine bijektive Abbildung von A in B existiert. Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

Übungsaufgaben zu Kapitel 5 „Algebra“

5.1.1 Betrachten Sie die Menge f = {((0,0),0), ((0,1),0), ((1,0),0), ((1,1),1)}.
a) Ist f eine Relation? Falls ja, stellen Sie diese als Tabelle, Matrix und als Graph dar.
b) Ist f eine Abbildung von $\{0,1\}^2$ in {0,1}? Falls ja, prüfen Sie, ob f injektiv und/oder surjektiv ist.
c) Ist f eine Operation? Falls ja, geben Sie Stelligkeit, Trägermenge und Wertetabelle an.

5.1.2 Beweisen Sie Satz 5.1.1 durch Fallunterscheidung für alle Belegungen von x, y und z.

5.1.3 Es sei f = {((0,0),0), ((0,1),0), ((1,0),0), ((1,1),1)}. Ist ({0,1}, f) eine Algebra? Begründen Sie Ihre Antwort.

5.2.1 Beweisen Sie: In einer Boolschen Algebra gilt x+x = x

5.2.2 Beweisen Sie: In einer Boolschen Algebra gilt x+1 = 1

5.2.3 Beweisen Sie: In einer Boolschen Algebra gilt x+(x·y) = x

5.3.1 Zeigen Sie die Eindeutigkeit des neutralen Elements.
Hinweis: Zeigen Sie: sind e und e’ neutrale Elemente, dann ist e=e’.

5.3.2 Sei (A, ·, e) ein Monoid, bei dem zu jeden a∈A ein inverses Element existiert. Zeigen Sie, dass dieses inverse Element endeutig bestimmt ist.
Hinweis: Zeigen Sie: ist a’·a=a·a’=e und a“·a=a·a“=e, dann ist a’=a“.

5.3.3 Zeigen Sie: In einem Ring (R, +, ·, -, 0, 1) gilt: ∀a∈R: 0 = 0·a

5.4.1 Zeigen Sie: Die Äquivalenzrelation $\equiv_m$ ist Kongruenzrelation auf dem Monoid ($\mathbb{Z}$, ·,1)

5.4.2 Geben Sie die Wertetabellen der Operationen +, · und - des Restklassenringes ($\mathbb{Z}/_{\equiv 4}$, +, ·, -, 0, 1) an. Existiert zu jedem Element von $\mathbb{Z}/_{\equiv 4}$, das von [0] verschieden ist, bezüglich der Operation · ein inverses Element?

Übungsaufgaben zu Kapitel 6 „Zahlen“

6.1.1 Berechnen 3+2 Sie nur unter Verwendung von Definition 6.1.1.

6.1.2 Definieren Sie die Multiplikation natürlicher Zahlen rekursiv unter Verwendung der Nachfolgerfunktion S und der Addition +.

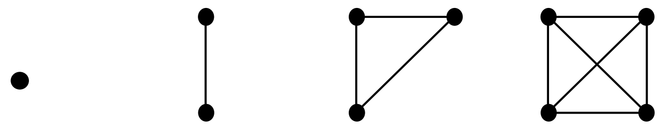
6.2.1 Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

6.2.2 Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und k>1 gilt

$$\sum_{i=0}^{n} k^i = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$$

6.2.3 Gegeben seien n Punkte. Wieviele Strecken gibt es, die je zwei der Punkte verbinden? Beispiele:



n = 0 n = 1 n = 2 n = 3 n = 4

S(n) sei die Anzahl solcher Strecken. Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $S(n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

6.2.4 Wieviele verschiedene zweistellige Operationen gibt es auf der Menge {0,1}? Hinweis: Nutzen Sie Satz 6.2.2

6.3.1 Zeigen Sie: Es gibt keine rationale Zahl x, sodass $x^2 = 7$.

6.4.1 Stellen Sie die Zahl 26_{10} binär, oktal und hexadezimal dar.

6.4.2 Stellen Sie die Zahl 2048_{10} 3-adisch dar.

6.4.3 Stellen Sie die folgende Zahlen mit insgesamt je 4 Binärstellen dar:
a) 3 in Vorzeichen-Betrags-Darstellung,
b) 3 in Zweier-Komplement-Darstellung,
c) -3 in Vorzeichen-Betrags-Darstellung,
d) -3 in Zweier-Komplement-Darstellung.

6.4.4 Stellen Sie die Zahl -210_{10} mit insgesamt 10 Binärstellen in Zweier-Komplement-Darstellung dar:

6.4.5 Berechnen Sie den Ausdruck ((10+0,000 01) - 10) * 1 000 000 wie angegeben von links nach rechts:
a) exakt
b) mit insgesamt 6 Stellen (Vorkommastellen + Nachkommastellen) Genauigkeit für alle Zwischenergebnisse, d.h. statt 123456789 wird mit 123456000 gerechnet, statt mit 123,456789 mit 123,456.