2. Mengen

Wozu Mengen?

In der Mathematik

Auf dem Mengenbegriff kann man die gesamte Mathematik aufbauen: Mengen, Relationen, Abbildungen, …

In der Informatik

Definition: Ein Alphabet ist eine endliche, nichtleere Menge von Symbolen.

Definition: Ein endlicher Automat ist ein System $A = (\Sigma, S, \delta, s_0, F)$. Dabei ist Σ das Eingabealphabet und S die Zustandsmenge von A, $s_0 \in S$ ist der Startzustand, $F \subseteq S$ die Menge der Endzustände und die Abbildung $\delta: S \times \Sigma \to S$ die Zustandsüberführungsfunktion von A.

Beispiele für Mengen

- Die Menge der Studierenden der Hochschule Trier
- Die Menge der natürlichen Zahlen zwischen 5 und 10: {6, 7, 8, 9}
- Die Menge mit den Elementen Liebe, Gesetz und Schornsteinfeger
- Die Menge der Symbole eines Alphabets
- Die Menge der Zustände eines Automaten
- Die Menge der Endzustände eines Automaten
- Die Menge aller Polsterfarben, die sich mit der Lackfarbe „Tiefseeblau" kombinieren lassen

Polsterfarbe \ Lackfarbe	Glutrot	Floraviolett	Kaskadenblau	Oasengrün	Schneeweiß	Vulkanrot	Tiefseeblau	Dschungelgrün	Meteorgrau	Mondsilber
Schiefergrau	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
Blauviolett					■		■		■	■
Petrol					■			■	■	■
Ziegelrot					■	■			■	■

Cantorsche Definition einer Menge

Unter einer Menge verstehen wir jede
Zusammenfassung M
von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten
unserer Anschauung oder unseres Denkens
(welche Elemente von M genannt werden)
zu einem Ganzen.

2.1 Beschreibung von Mengen

Rolf Linn

• Beschreibung durch Aufzählung ihrer Elemente:

M = { 5, 3, 11, 14 }
N = { Liebe, Gesetz, Schornsteinfeger }
O = { 1, blau, 2 }

{ 1, 3, 8 } = { 3, 8, 1 }

$11 \in \{ 5, 3, 11, 14 \}$
$12 \notin \{ 5, 3, 11, 14 \}$

• Beschreibung durch eine charakteristische Eigenschaft:

M = { x | x hat die Eigenschaft E }
$x \in M$ genau dann, wenn x die Eigenschaft E hat.
Beispiele: M = { x | x =3 oder x=5 } (es gilt dann M = { 3, 5 }
M = { x | $x \in \mathbb{N}$ und x>8 }

$\mathbb{N}$ = { 0, 1, 2, 3, … } bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen.

Statt M = { x | $x \in \mathbb{N}$ und x>8 } schreiben wir auch einfacher M = { $x \in \mathbb{N}$ | x>8 }

2.1 Beschreibung von Mengen GM 2-5

Definition 2.1.1: Leere Menge

Rolf Linn

$\emptyset = \{ x \mid x \neq x \}$ heißt die leere Menge.

Mengen können auch Mengen als Element enthalten:

A = { 0, 1}
B = { 1, 2, 3 }
C = { A, B }
D = { A, ∅, 5 }

2.1 Beschreibung von Mengen GM 2-6

Russelsche Antinomie

Rolf Linn

M = { x | $x \notin x$ }

Dann ist $x \in M$ genau dann, wenn $x \notin x$.

Gilt $M \in M$?
D.h. ist x=M auch in M als Element enthalten?

Dann wäre $M \in M$ genau dann, wenn $M \notin M$.

Widerspruch!

2.1 Beschreibung von Mengen GM 2-7

Wen rasiert der Dorfbarbier?

Rolf Linn

Barbier: Ich rasiere alle die Leute im Dorf, die sich nicht selber rasieren.

Mathematiker: Rasieren Sie sich selbst?

Barbier: Ja.

Mathematiker: Das kann nicht sein, denn Sie rasieren nur die, die sich nicht selber rasieren.

Barbier: Also nein.

Mathematiker: Das kann auch nicht sein, denn Sie rasieren alle Bewohner des Dorfes, die sich nicht selber rasieren.

Widerspruch!

2.1 Beschreibung von Mengen GM 2-8

2.2 Formale Logik

Wahrheitswerte
Logische Verknüpfungen
Tautologien
Quantoren

Mehrdeutigkeiten bei „und“ und „oder“

Heiner ist krank und es regnet.

Heiner wurde krank und der Arzt verordnete eine Medizin.

Der Arzt verordnete eine Medizin und Heiner wurde krank.

Hände hoch, oder ich schieße!

Die Ausfuhr von Gold oder Edelsteinen ist verboten.

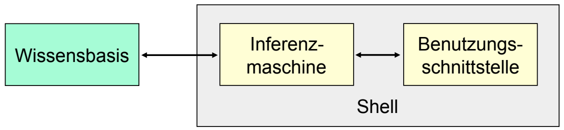
Welche Polsterfarben lassen sich mit der Lackfarbe „Tiefseeblau“ oder „Dschungelgrün“ kombinieren?

Lackfarbe / **Polsterfarbe**

Polsterfarbe	Glutrot	Floraviolett	Kaskadenblau	Oasengrün	Schneeweiß	Vulkanrot	Tiefseeblau	Dschungelgrün	Meteorgrau	Mondsilber
Schiefergrau	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
Blauviolett					■		■		■	■
Petrol					■			■	■	■
Ziegelrot					■	■			■	■

Anwendung formaler Logik

Wissensbasierte Systeme



Definition 2.2.1: Logische Verknüpfungen

Aussagen können die Wahrheitswerte *w* (wahr) oder *f* (falsch) annehmen.
Durch folgende Wahrheitstafeln definieren wir Verknüpfungen von Aussagen P und Q:

Negation
(nicht P)

P	$\neg$P
f	*w*
w	*f*

Konjunktion
(P und Q)

P	Q	P$\wedge$Q
f	*f*	*f*
f	*w*	*f*
w	*f*	*f*
w	*w*	*w*

Disjunktion
(P oder Q)

P	Q	P$\vee$Q
f	*f*	*f*
f	*w*	*w*
w	*f*	*w*
w	*w*	*w*

Übungsaufgabe 2.2.1

Implikation
(wenn P, dann Q)

P	Q	P$\Rightarrow$Q
f	*f*	*w*
f	*w*	*w*
w	*f*	*f*
w	*w*	*w*

Äquivalenz
(Q genau dann, wenn P)

P	Q	P$\Leftrightarrow$Q
f	*f*	*w*
f	*w*	*f*
w	*f*	*f*
w	*w*	*w*

Definition 2.2.2: Tautologie

Eine aussagenlogische Formel mit den Aussagenvariablen P, Q, R, ... heißt allgemeingültig (oder Tautologie), wenn bei jeder Zuordnung (Belegung) von Wahrheitswerten zu P, Q, R, ... die Formel den Wahrheitswert *w* annimmt.

Satz 2.2.1: Tautologien

Es seien P, Q und R Aussagenvariablen. Dann sind die folgenden aussagenlogische Formeln allgemeingültig:

a) $P \Rightarrow (P \vee Q)$

b) $(P \wedge Q) \Rightarrow P$

c) $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ (modus barbara)

d) $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$ (modus ponens)

e) $((P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$ (modus tollens)

f) $((P \wedge \neg Q) \Rightarrow f) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$ (indirekter Beweis)

Übungsaufgabe 2.2.2

Definition 2.2.3: Äquivalenz von Formeln

Zwei aussagenlogische Formeln mit den Aussagenvariablen P, Q, R, ... heißen äquivalent, wenn bei jeder Zuordnung (Belegung) von Wahrheitswerten zu P, Q, R, ... beide Formeln den gleichen Wahrheitswert haben.

Wir drücken dies durch das Zeichen $\equiv$ aus.

Satz 2.2.2: Gesetze der Aussagenlogik

Es gelten folgende Äquivalenzen aussagenlogischer Formeln:

$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$ $P \vee Q \equiv Q \vee P$	Kommutativität
$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	Distributivität
$P \wedge w \equiv P$ $P \vee f \equiv P$	neutrale Elemente
$P \wedge \neg P \equiv f$ $P \vee \neg P \equiv w$	Komplement

Übungsaufgabe 2.2.3

Satz 2.2.3: weitere Gesetze der Aussagenlogik

Rolf Linn

Es gelten folgende Äquivalenzen aussagenlogischer Formeln:

$P \wedge P \equiv P$ $P \vee P \equiv P$	Idempotenz
$P \wedge f \equiv f$ $P \vee w \equiv w$	
$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$ $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$	Absorption
$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$ $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$	Assoziativität
$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$	De Morgansche Gesetze
$\neg(\neg P) \equiv P$	
$\neg f \equiv w$ $\neg w \equiv f$	

Definition 2.2.4: Aussageform und Quantoren

Rolf Linn

Ersetzt man in einer Aussage P irgendeine Konstante durch eine Variable x, so entsteht eine Aussageform P(x).

Die Aussage „Für alle $x \in M$ gilt P(x)" ist wahr genau dann, wenn P(x) für alle $x \in M$ wahr ist. Abkürzend schreibt man für diese Aussage

$\forall x \in M$: P(x)

Die Aussage „Es gibt ein $x \in M$, sodass P(x)" ist wahr genau dann, wenn P(x) für mindestens ein $x \in M$ wahr ist. Abkürzend schreibt man für diese Aussage

$\exists x \in M$: P(x)

Satz 2.2.4: Rechenregeln für Quantoren

Rolf Linn

Für Ausageformen P(x) und Q(x) gelten folgende Äquivalenzen:

$\neg \forall x: P(x) \equiv \exists x: \neg P(x)$

$\neg \exists x: P(x) \equiv \forall x: \neg P(x)$

$(\forall x: P(x) \wedge \forall x: Q(x)) \equiv \forall x: P(x) \wedge Q(x)$

$(\exists x: P(x) \vee \exists x: Q(x)) \equiv \exists x: P(x) \vee Q(x)$

Übungsaufgabe 2.2.4

Beschreibung der Eigenschaften einer Menge

Rolf Linn

Mit den Verknüpfungen der Formalen Logik können wir die Eigenschaften der Elemente einer Menge präziser formulieren:

Beispiele:

$M = \{ x \mid x=3 \vee x=5 \} = \{ 3, 5 \}$

$M = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x>8 \} = \{ 9, 10, 11, 12, \dots \}$

$M = \{ x \in \mathbb{N} \mid x<8 \wedge \neg(x=5) \} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7 \}$

$M = \{ x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}: x=3y \} = \{ 0, 3, 6, 9, \dots \}$

Übungsaufgaben 2.2.5 bis 2.2.9

2.3 Beziehungen zwischen Mengen

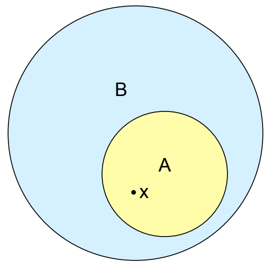
Rolf Linn

Teilmengen
Gleichheit von Mengen
Potenzmengen

Definition 2.3.1: Teilmenge

Rolf Linn

Es seien A und B Mengen.
A heißt Teilmenge von B, geschrieben $A \subseteq B$, falls für alle x gilt:
$x \in A \Rightarrow x \in B$.



Übungsaufgabe 2.3.1

Definition 2.3.2: Gleichheit von Mengen

Rolf Linn

Es seien A und B Mengen.
A und B sind gleich, geschrieben $A=B$, falls $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.
Für $\neg(A=B)$ schreiben wir wie üblich $A \neq B$.

Übungsaufgabe 2.3.2

Definition 2.3.3: Echte Teilmenge

Rolf Linn

Es seien A und B Mengen.
A heißt echte Teilmenge von B, geschrieben $A \subset B$, falls
$A \subseteq B$ und $A \neq B$.

Übungsaufgaben 2.3.3 und 2.3.4

Definition 2.3.4: Potenzmenge

Rolf Linn

Es sei M eine Menge.
$\mathcal{P}(M) = \{ A \mid A \subseteq M \}$ heißt Potenzmenge von M.

Übungsaufgabe 2.3.5

2.3 Beziehungen zwischen Mengen — GM 2-25

2.4 Mengenoperationen

Rolf Linn

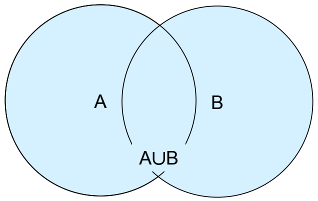
Vereinigung
Durchschnitt
Differenz
Komplement

2.4 Mengenoperationen — GM 2-26

Definition 2.4.1: Vereinigung

Rolf Linn

Seien A und B Mengen.
$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$ heißt <u>Vereinigung</u> von A und B.



2.4 Mengenoperationen — GM 2-27

Satz 2.4.1: Gesetze der Vereinigung

Rolf Linn

Seien A und B Mengen. Dann gilt:

a) $A \cup B = B \cup A$ (Kommutativität)
b) $A \cup \emptyset = A$
c) $A \subseteq A \cup B$
d) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

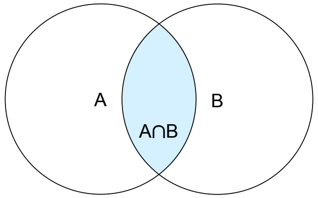
Übungsaufgabe 2.4.1

2.4 Mengenoperationen — GM 2-28

Definition 2.4.2: Durchschnitt

Rolf Linn

Seien A und B Mengen.
$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$ heißt Durchschnitt von A und B.



Satz 2.4.2: Gesetze des Durchschnitts

Rolf Linn

Seien A und B Mengen. Dann gilt:

a) $A \cap B = B \cap A$ (Kommutativität)

b) $A \cap \emptyset = \emptyset$

c) $A \cap B \subseteq A$

d) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

Übungsaufgaben 2.4.2 und 2.4.3

Satz 2.4.3: Distributivgesetze

Rolf Linn

Seien A, B und C Mengen. Dann gilt:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

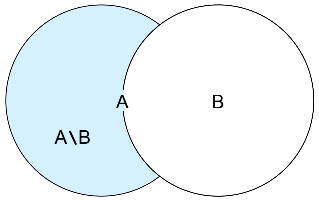
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Übungsaufgabe 2.4.4

Definition 2.4.3: Differenz

Rolf Linn

Seien A und B Mengen.
$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$ heißt Differenz von A und B oder auch A ohne B.

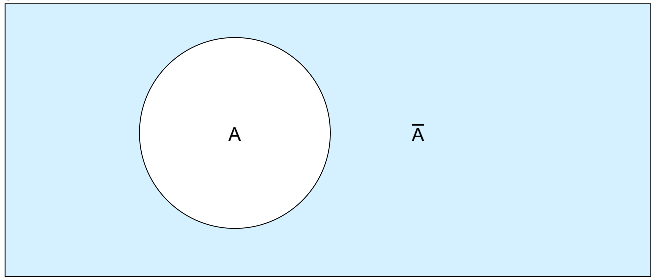


Übungsaufgabe 2.4.5

Definition 2.4.4: Komplement

Sei A Teilmenge der Grundmenge $\mathcal{G}$.
$\overline{A} = \mathcal{G} \setminus A$ heißt Komplement von A bezüglich $\mathcal{G}$.

$\mathcal{G}$



Satz 2.4.4: Komplement

Sei A Teilmenge der Grundmenge $\mathcal{G}$.
Dann gilt:

a) $A \cap \overline{A} = \emptyset$

b) $A \cup \overline{A} = \mathcal{G}$

Übungsaufgabe 2.4.6

Satz 2.4.5: Gesetze der Mengenoperationen

Es seien A, B und C Teilmengen der Grundmenge $\mathcal{G}$.
Dann gilt:

$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$	Kommutativität
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivität
$A \cap \mathcal{G} = A$ $A \cup \emptyset = A$	neutrale Elemente
$A \cap \overline{A} = \emptyset$ $A \cup \overline{A} = \mathcal{G}$	Komplement

Satz 2.4.6: weitere Gesetze der Mengenoperationen

Es seien A, B und C Teilmengen der Grundmenge $\mathcal{G}$.
Dann gilt:

$A \cap A = A$ $A \cup A = A$	Idempotenz
$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup \mathcal{G} = \mathcal{G}$	
$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$	Absorption
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Assoziativität
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	De Morgansche Gesetze
$\overline{\overline{A}} = A$	
$\overline{\emptyset} = \mathcal{G}$ $\overline{\mathcal{G}} = \emptyset$	