6. Zahlen

Rolf Linn

6.1 Natürliche Zahlen
6.2 Induktion und Rekursion
6.3 Ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen
6.4 Darstellung von Zahlen

6. Zahlen GM 6-1

6.1 Natürliche Zahlen

Rolf Linn

Vom lieben Gott gemacht

Menschenwerk:
- operativ oder
- Klassen äquivalenter Mengen oder
- axiomatisch (Peano 1889)

6.1 Natürliche Zahlen GM 6-2

Peano'sche Axiome der natürlichen Zahlen

Rolf Linn

(P1) 0 ist eine natürliche Zahl.
(P2) Jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger S(n).
(P3) Aus S(n) = S(m) folgt n = m.
(P4) 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.
(P5) Jede Menge X, die 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger S(n) enthält, umfasst alle natürlichen Zahlen.

Die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{N}$

6.1 Natürliche Zahlen GM 6-3

Definition 6.1.1: Addition natürlicher Zahlen

Rolf Linn

Die zweistellige Operation + (Addition) auf $\mathbb{N}$ wird definiert durch:

$$x + y = \begin{cases} x & \text{falls} \quad y = 0 \\ S(x+z) & \text{falls} \quad y = S(z) \end{cases}$$

Es gilt also $x+0 = x$
und $x+S(z) = S(x+z)$

Übungsaufgabe 6.1.1

6.1 Natürliche Zahlen GM 6-4

Satz 6.1.1: Addition natürlicher Zahlen

Für $\forall x \in \mathbb{N}$, $\forall y \in \mathbb{N}$ und $\forall z \in \mathbb{N}$ gilt:

a)	$x+(y+z) = (x+y)+z$	(Assoziativität)
b)	$x+y = y+x$	(Kommutativität)
c)	$x+0 = 0+x = x$	(neutrales Element)

Die Algebra $(\mathbb{N}, +, 0)$ ist also ein kommutatives Monoid.

Übungsaufgabe 6.1.2

6.2 Induktion und Rekursion

Einführendes Beispiel:
Berechne die Summe S der natürlichen Zahlen von 0 bis n.

Idee:

$$\left.\begin{array}{ccccc} 0 & + & n & = & n \\ 1 & + & n-1 & = & n \\ 2 & + & n-2 & = & n \\ . & & . & & . \\ . & & . & & . \\ . & & . & & . \\ n-1 & + & 1 & = & n \\ n & + & 0 & = & n \end{array}\right\} \text{(n+1) Zeilen}$$

$$S + S = n \cdot (n+1)$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}}$$

Vollständige Induktion

Beweise für eine Aussageform mit einer Variablen n, dass sie für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

<u>Induktions-anfang:</u> Zeige: Die Aussage gilt für n=0.

<u>Induktions-schritt:</u> Zeige: Wenn die Aussage für n=k gilt (<u>Induktionsannahme</u>), dann gilt sie auch für n=k+1.

Die Aussage gilt daher für

n=0 n=1 n=2 n=3 . . .

Induktions-anfang Induktions-schritt Induktions-schritt Induktions-schritt Induktions-schritt

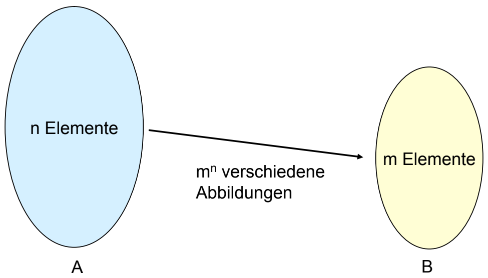
d.h. wegen Peano-Axiom (P5) für alle $n \in \mathbb{N}$

Satz 6.2.1: Summe der Zahlen von 0 bis n

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Satz 6.2.2: Anzahl von Abbildungen

Ist A eine n-elementige und B eine m-elementige Menge, wobei m>0, dann gibt es m^n verschiedene Abbildungen von A in B.



Übungsaufgaben 6.2.1 bis 6.2.4

Definition 6.2.1: Fakultät

Für alle n∈IN definiert man die Fakultät n! durch

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad n = 0 \\ (n-1)! \cdot n & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist n! = 1·2·3· … ·n

Rekursive Programmierung der Fakultätsfunktion:

```
int Fakultaet (int n)
        { if(n == 0)
                return 1;
        else
                return Fakultaet(n-1) * n;
        }
```

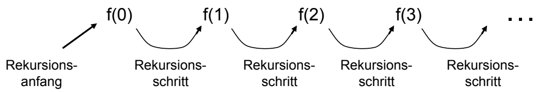

Rekursion

Rekursive Definition einer Abbildung f: IN→IN.

<u>Rekursions-anfang:</u> Festlegung des Wertes f(0).

<u>Rekursions-schritt:</u> Festlegung des Wertes f(k+1) unter Verwendung von f(k).

Damit ist der Wert festgelegt von



d.h. wegen Peano-Axiom (P5) f(n) für alle n∈IN

Satz 6.2.3: Rekursionssatz

Eine Abbildung f: IN→IN ist vollständig bestimmt, wenn gegeben ist:

a) f(0)

b) für alle n∈IN, wobei n>0, eine Abbildung F_n: IN→IN mit der f(n) aus f(n-1) berechnet wird: f(n) = F_n(f(n-1)).

Beispiel: Für alle n∈IN definiert man die Fakultät n! durch

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad n = 0 \\ (n-1)! \cdot n & \text{sonst} \end{cases}$$

0! = f(0) = 1

$F_n(x) = x \cdot n$

$n! = f(n) = F_n(f(n-1)) = f(n-1) \cdot n = (n-1)! \cdot n$

6.3 Ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

$\downarrow$ Erweiterung

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

$\downarrow$ Erweiterung

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

$\downarrow$ Erweiterung

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

$\downarrow$ Erweiterung

Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Ganze Zahlen

Sei $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$. Gesucht ist $x \in \mathbb{N}$, sodass $a+x = b$ gilt.

In $\mathbb{N}$ nur lösbar, wenn $a \leq b$.

Erweiterung mit möglichst wenig weiteren Zahlen zu den <u>ganzen Zahlen</u>, sodass obige Gleichung immer lösbar ist. Die Menge der ganzen Zahlen wird mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet.

$(\mathbb{Z}, +, \cdot, -, 0, 1)$ ist ein kommutativer Ring.

Rationale Zahlen

Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}$. Gesucht ist $x \in \mathbb{Z}$, sodass $a \cdot x = b$ gilt.

In $\mathbb{Z}$ nur lösbar, wenn a Teiler von b ist.

Erweiterung mit möglichst wenig weiteren Zahlen zu den <u>rationalen Zahlen</u>, sodass obige Gleichung immer lösbar ist, falls $a \neq 0$ (Brüche bzw. Dezimalbrüche). Die Menge der rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

$(\mathbb{Q}, +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1)$ ist ein Körper.

Reelle Zahlen

Sei $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$ und $b>0$. Gesucht ist $x \in \mathbb{Q}$, sodass $x^a = b$ gilt.

Diese Gleichung ist für a=2 und b=2 in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.

Satz 6.3.1: Quadratwurzel aus 2

Rolf Linn

Es gibt keine rationale Zahl x, sodass $x^2 = 2$.

Zum Beweis benötigt man den

Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie:

Jede natürliche Zahl >1 ist – abgesehen von der Reihenfolge der Faktoren – eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellbar.

6.3 Ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen GM 6-17

Indirekter Beweis

Rolf Linn

Beispiel: Satz 6.3.1: $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 \neq 2$

Ein indirekter Beweis basiert auf der Tautologie

$$((A \wedge \neg B) \Rightarrow f) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B).$$

$x \in Q$ $\quad x^2 \neq 2$

$x \in \mathbb{Q} \wedge x^2 = 2$

$\Downarrow \qquad \Uparrow$

$\exists m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$: (m und n teilerfremd) $\wedge \neg$ (m und n teilerfremd)

Übungsaufgabe 6.3.1

6.3 Ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen GM 6-18

Reelle Zahlen

Rolf Linn

Sei $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$ und $b>0$. Gesucht ist $x \in \mathbb{Q}$, sodass $x^a = b$ gilt.

Diese Gleichung ist für a=2 und b=2 in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.

Erweiterung mit möglichst wenig weiteren Zahlen zu den reellen Zahlen, sodass obige Gleichung immer lösbar ist, falls b>0. Die Menge der reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Reelle Zahlen, die keine rationale Zahlen sind, heißen irrationale Zahlen. Zu ihnen gehören z.B. $\sqrt{2}$, e und π.

$(\mathbb{R}, +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1)$ ist ein Körper.

6.3 Ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen GM 6-19

Komplexe Zahlen

Rolf Linn

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$. Gesucht ist $x \in \mathbb{R}$, sodass $x^a = b$ gilt.

Diese Gleichung ist für a=2 und b=-1 in $\mathbb{R}$ nicht lösbar, da es keine reelle Zahl gibt, deren Quadrat -1 ist.

Definition der imaginären Einheit i mit $i^2 = -1$. Eine Zahl der Form a+bi heißt dann komplexe Zahl. Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

$(\mathbb{C}, +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1)$ ist ein Körper.

6.3 Ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen GM 6-20

6.4 Darstellung von Zahlen

Rolf Linn

Zahlen sind abstrakte Objekte. Zum
- Speichern,
- Kommunizieren oder
- Rechnen

Müssen sie in einer geeigneten Form dargestellt werden.
Dies ist erforderlich unabhängig davon, ob dies auf einem Blatt Papier, in einem Rechner oder sonstwo geschehen soll.

Beispiel: Darstellung der Zahl Zwölf

naheliegend: ||||||||||||
verbessert: ~~||||~~ ~~||||~~ ||
römisch: XII
b-adische Darstellungen (Stellenwertverfahren):
2-er-System (binär): 1100
8-er-System (oktal): 14
10-er-System (dezimal): 12
16-er-System (hexadezimal): C

6.4 Darstellung von Zahlen GM 6-21

Satz 6.4.1: b-adische Darstellung

Rolf Linn

Seien $b \in IN$ und $b>1$.
Zu jeder natürlichen Zahl a gibt es eine eindeutige Darstellung der Form

$$a = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b^i$$

wobei $n \in IN$, $a_n \neq 0$ falls $n>0$ und $a_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ für $1 \le i \le n$.
Diese heißt b-adische Darstellung der Zahl a.

Beispiel: $b = 3$

$$\underset{\text{3-adische Darstellung}}{1202_3} = \underbrace{1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 27 + 18 + 0 + 2 = 47_{10}}_{\text{10-adische Darstellung}}$$

6.4 Darstellung von Zahlen GM 6-22

Umwandlung in eine b-adische Darstellung

Rolf Linn

Sei $x \in IN$ und $x = x_n b^n + x_{n-1} b^{n-1} + \ldots + x_1 b^1 + x_0 b^0$

Wir dividieren x durch b:
$x : b = (x_n b^n + x_{n-1} b^{n-1} + \ldots + x_1 b^1 + x_0 b^0) : b = x_n b^{n-1} + x_{n-1} b^{n-2} + \ldots + x_1 b^0$ Rest x_0

Dividieren wir den Quotienten wieder durch b, erhalten wir:
$(x_n b^{n-1} + x_{n-1} b^{n-2} + \ldots + x_1 b^0) : b = x_n b^{n-2} + x_{n-1} b^{n-3} + \ldots + x_2 b^0$ Rest x_1

usw.

$\vdots \qquad \vdots$

$(x_n b^1 + x_{n-1} b^0) : b = x_n b^0$ Rest x_{n-1}

$(x_n b^0) : b = 0$ Rest x_n

Übungsaufgabe 6.4.1 und 6.4.2

6.4 Darstellung von Zahlen GM 6-23

Darstellung natürlicher Zahlen auf Rechnern

Rolf Linn

Solange genug Speicherplatz zur Verfügung steht, können beliebig große natürliche Zahlen auf einem Rechner dargestellt werden.

In der Praxis wird aber die maximale Stellenzahl im Voraus festgelegt, dann ist die Größe der darstellbaren Zahlen beschränkt.

6.4 Darstellung von Zahlen GM 6-24

Darstellung ganzer Zahlen
Rolf Linn

Vorzeichen-Betrags-Darstellung

Die ganze Zahl x wird dargestellt durch

v(x)	|x|

, wobei $v(x) = \begin{cases} - \text{ bzw. } 1 & \text{falls } x < 0 \\ + \text{ bzw. } 0 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$

Nachteil: Ausführung von Rechenoperationen umständlich.

b-Komplement-Darstellung

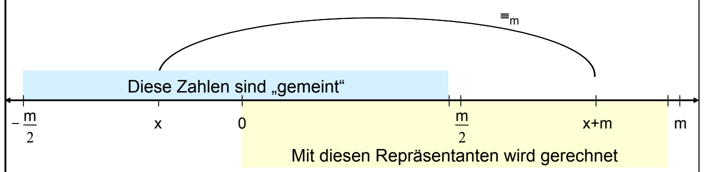
Stehen n Binärstellen zur Darstellung einer Zahl zur Verfügung, können $m = b^n$ verschiedene Zahlen dargestellt werden. Man nimmt dann statt $\mathbb{Z}$ den Restklassenring $(\mathbb{Z}/\equiv_m, +, \cdot, -, 0, 1)$.

Da zum Rechnen beliebige Repräsentanten einer Kongruenzklasse genommen werden können, kann man auch für Kongruenzklassen negativer Zahlen mit positiven Repräsentanten rechnen.

So vermeidet man den Nachteil der Vorzeichen-Betrags-Darstellung.

Komplement-Darstellung ganzer Zahlen
Rolf Linn

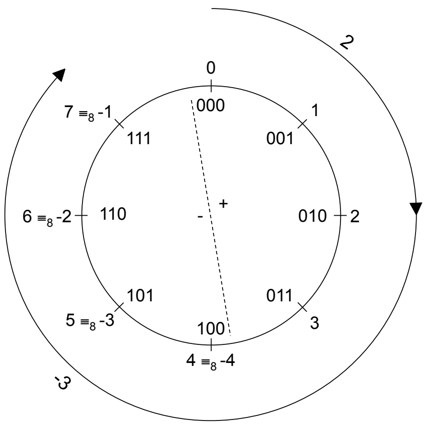
Es seien m verschiedene Zahlen darstellbar.



Für $x \in \mathbb{Z}$ steht die Restklasse $[x]_{\equiv_m}$.

Ist x<0 wird $[x]_{\equiv_m}$ durch den Repräsentanten x+m dargestellt und mit diesem gerechnet.
Da $x+m \geq 0$, wird nur mit nicht negativen Zahlen gerechnet.

2+(-3) in Zweier-Komplement-Darstellung
Rolf Linn



Satz 6.4.2: -x in Zweier-Komplement-Darstellung
Rolf Linn

Sei $b_{n-1}\ldots b_0$ die Zweier-Komplement-Darstellung der ganzen Zahl x.
Aus $\overline{b_{n-1}}\ldots\overline{b_0} + 0\ldots01$ ergibt sich dann die Zweier-Komplement-Darstellung von –x.

Übungsaufgabe 6.4.3 und 6.4.4

Darstellung ganzer Zahlen auf Rechnern

Rolf Linn

Solange genug Speicherplatz zur Verfügung steht, können beliebig große oder kleine ganze Zahlen auf einem Rechner dargestellt werden.

In der Praxis wird aber die maximale Stellenzahl im Voraus festgelegt, dann ist die Größe der darstellbaren nach oben und unten Zahlen beschränkt.

6.4 Darstellung von Zahlen GM 6-29

Darstellung rationaler Zahlen auf Rechnern

Rolf Linn

Solange genug Speicherplatz zur Verfügung steht, können beliebig große oder kleine rationale Zahlen auf einem Rechner exakt dargestellt werden (z.B. als Bruch zweier ganzer Zahlen).

In der Praxis werden rationale Zahlen als Binärbrüche (Gleitkomma) dargestellt, deren Stellenzahl im Voraus festgelegt ist, daher ist sowohl die Größe als auch die Genauigkeit der darstellbaren Zahlen beschränkt.

6.4 Darstellung von Zahlen GM 6-30

Darstellung reeller Zahlen auf Rechnern

Rolf Linn

Eine reelle Zahl kann als unendlicher Dezimalbruch $z_n z_{n-1} \ldots z_1 z_0, z_{-1} z_{-2} z_{-3} \ldots$ dargestellt werden. Auch eine Darstellung als unendlicher Binärbruch ist möglich. Unendlich viele Stellen können aber auf einem Rechner nicht dargestellt werden.

Gibt es eine andere Möglichkeit reelle Zahlen auf einem Rechner exakt darzustellen?

Nein, siehe Satz 6.4.3.

6.4 Darstellung von Zahlen GM 6-31

Satz 6.4.3: Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar

Rolf Linn

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist nicht abzählbar, d.h. es gibt keine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$.

Beweis: Wir zeigen, dass schon die Menge $A = \{ a \in \mathbb{R} \mid 0<a<1 \}$ nicht abzählbar ist.

Wäre A abzählbar, könnten wir alle Elemente von A aufzählen:

$$a_1 = 0,z_{11}z_{12}z_{13}\ldots$$
$$a_2 = 0,z_{21}z_{22}z_{23}\ldots$$
$$a_3 = 0,z_{31}z_{32}z_{33}\ldots$$
$$\vdots$$

Wir bilden eine weitere Zahl $x = 0,z_1z_2z_3\ldots$, wobei für i = 1, 2, 3, …

$$z_i = \begin{cases} 2 & \text{falls} \quad z_{ii} = 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt dann $0<x<1$ und $x \notin A$. Dies ist ein Widerspruch.

Übungsaufgabe 6.4.5 GM 6-32